$$0,11$$

$$0,21$$

Was sind rationale Zahlen?

- Brüche
- Periodische Zahlen

Zunächst Zahlen wie

- $0,333333333\ldots333$
- $0,123123123\ldots123$

Alle Brüche sind Zahlen wie

$$0,3333333\ldots333$$

Aber was betrifft die Abzählbarkeit und die Menge. Gibt es nicht viel mehr als

$$\frac{2}{3},\frac{[}{2}5,\frac{3}{6},\ldots$$

weil ich kann eine Zahl wie $0,3333\ldots$ wieder durch 2 teilen, oder sogar durch $0,22222\ldots$. Was die Abzählbarkeit von Brüchen betrifft, glauben wir ja alles, auch mit dem Verfahren, was der Beweis für die Abzählbarkeit ist. Aber was ist mit $0,3333\ldots$ durch $0,123123123\ldots123$? Aber aber: $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c}$ und $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ und $0,333\ldots$ durch 2 ist $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ und $0,3333\ldots$ durch $0,123123123\ldots123$ ist $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$

$$\begin{array}{c}0,1\\0,2\\0,3\\\ldots\\0,9\end{array}$$

wie viele Ziffern gibt es?

$$\begin{array}{c}0,1\\0,2\\0,3\\\ldots\\0,9\end{array}$$

Dann gibt es 9 oder 10 verschiedene Möglichkeiten. Dahinter noch mal 9

$$\begin{array}{cc}0,11 & 0,12\\0,21 & 0,22\\0,31 & 0,32\end{array}$$

also $9 \cdot 9$ verschiedene Möglichkeiten. Und nun ab wann wird eine Zahl periodisch

$$\begin{gathered} 0,123 \\ 0,1234 \\ 0,12345 \end{gathered}$$

gut dann habe ich

$$\begin{gathered} 0,123123 \\ 0,234234 \end{gathered}$$

Dann habe ich $9 \cdot 9 \cdot 9$ Möglcihkeiten.
Davon habe ich zwar ∞ nein, ich habe auch nicht weil

$$0,123456789$$

Trotzdem jede beliebige Stellung. Also igbt es gar nicht so viele Möglichkeiten. Aber eine Zahl unperiodisch zu machen ist einfach

$$0,12301231239123\ldots$$

$$0,12312312371231231231 23\ldots$$

Davon gibt es unenlich viele Möglichkeiten und rationale Zahlen sind einfach nur periodisch. Rational = periodisch. Das ist einfacher durcheinander zu bringen, als zu erzeugen.

Also das Verfahren (Das mit den Pfeilen und den Brüchen) funktioniert. Doch erfasst das alle? $0,03030303\ldots$ (äh) $\dfrac{0,33333\ldots}{0,123123\ldots}$ auch?
Ja denn

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Also: Was heißt abzählbar unendlich: Es gibt eine Bijektion (eine Abbildung, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist) von den Natürlichen Zahlen zu den zum Beispiel Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Wenn wir nun die Brüche betrachten. Etwas, wie $\dfrac{0,33333\ldots333}{0,123123123\ldots123}$ stellte sich als $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ heraus und etwas wie $\dfrac{0,33333\ldots333}{2}$ stellte sich als $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ heraus, also als $\dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$ und $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ heraus. Nun, wenn wir eine Bijektion haben, mit der die Abzählbarkeit vorliegt, dann haben wir eine Abbildung von den Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Wir haben nun eine Abbildung $f(a,b) := \dfrac{a}{b}$. Wir haben eine zweidimensionale Abbildung, die es auf $\dfrac{a}{b}$ abbildet. In Wirklichkeit haben wir eine Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, (a,b) \mapsto \dfrac{a}{b}$. Mit dieser Abbildung erfassen wir sämtliche rationale Zahlen. Es gibt ja keine anderen rationalen Zahlen als $\dfrac{a}{b}$. Wir haben ja festgestellt, dass selbst $\dfrac{0,123123123\ldots}{0,3333333\ldots}$ eine Zahl der Form $\dfrac{a}{b}$ ist. Damit haben wir eine Bijektion,

von $n \mapsto \frac{a}{b}$. Damit wird jede rationale Zahl erfasst. Auch wenn die Abbildung zweidimensional ist. Trotzdem liegt eine Bijektion vor und es wird jede rationale Zahl erfasst. Wenn wir nun die irrationalen Zahlen wir $\sqrt{2}$ auch erfassen wollen, können wir das aber nicht mit $\frac{a}{b}$. Also brauchen wir eine andere Abbildung. Die Abbildung würde zum Beispiel lauten $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$. Damit können wir aber nicht die rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ erfassen. Denn mit $\sqrt{n}$ lässt sich nicht unbedingt jede rationale Zahl erfassen. Dann werden Sie aber sagen, doch wir können auch von $0,3333\ldots333$ das Quadrat bilden, das wäre $0,9999\ldots999$. Das ist dann aber keine natürliche Zahl $\mathbb{N}$ mehr. Und wir haben gefordert, dass es eine Abbildung von den Natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen gibt. Aber die letzten zwei Sätze sind unwichtig wir können mit $\sqrt{n}$ nicht jede rationale Zahl erwischen. Es gibt $\frac{a}{b}$, die nicht durch $\sqrt{n}$ erreichbar sind, auch wenn die irrationalen Zahlen eine Erweiterung der rationalen Zahlen zu den Reellen Zahlen darstellen, so sind doch manche $\frac{b}{b}$ nicht durch $\sqrt{n}$ erreichbar. Also hätten wir zur Erfassung der reellen Zahlen, als Gesamtheit zwei Funktionen. Einerseits eine zur Beschreibung der rationalen Zahlen, $\frac{a}{b}$ und eine zur Erfassung der irrationalen Zahlen zum Beispiel $\sqrt{n}$. Dann haben wir aber keine Bijektion mehr in dem Sinne. Wir brauchen einen einzigen Ausdruck, eine einzige Vorschrift im Sinne eine Abbildung zur Beschreibung zunächst der Rationalen Zahlen, die wir ja haben, dann der irrationalen, dann zusammen der Reellen.
Was ist nun mit Zahlen wie, $0,677777$. Na ja, das mit dem Periodisch bezieht sich auf die erste Stelle, ab der die Zahl periodisch wird. Und nun: Bei $0,111\ldots$, $0,112\ldots, 0,113\ldots, 0,114\ldots, \ldots, 0,121\ldots, 0,122\ldots, 0,123\ldots, \ldots, 0,211\ldots$ haben wir alleine $9 \times 9 \times 9$ Möglichkeiten. Aber mehr nicht. Nun das lässt sich nach hinten beliebig fortsetzen. Dann haben wir aber $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ und $\frac{\frac{a}{b}}{c}$, was dasselbe ist wie $\frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ und $\frac{a}{b \cdot c}$.

So: Was haben wir gesagt:
Mit $\frac{a}{b}$ haben wir die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nun wir haben die Menge $\sqrt[c]{2}$ wobei $c \in \mathbb{N}$ und 2 ist eine Primzahl. Egal welches c ist eine Primzahl. Egal welches c wir annehmen $\sqrt[c]{2}$ bleibt immer irrational. Ist das die Erweiterung der $\mathbb{Q}$? Nein, das wäre eine additive Erweiterung.

Nun haben wir aber auch Brüche $\frac{\sqrt[c]{2}}{b}$ oder $\frac{a}{\sqrt[c]{2}}$. Das alleine wäre schon $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Warum? Übrigens: Mindestens. Weil wir beliebig viel $c \in \mathbb{N}$ und für a gibt es beliebig viele viele $\mathbb{N}$. Nun gibt es aber mehrere Primzahlen, nämlich $2, 3, 7, \ldots$. Also: Muß da nicht nur stehen: $\frac{a}{\sqrt[c]{2}}$ sondern $\frac{a}{\sqrt[c]{3}}$. Das heißt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (\mathbb{P} \cup \mathbb{N})$.
Wichtig ist: Periodisch:

$$0,111111\ldots$$
$$0,222222\ldots$$
$$0,333333\ldots$$
$$\ldots$$
$$0,999999\ldots$$

Jetzt aber auch

$$0,111\ldots 111$$
$$0,112\ldots 112$$
$$0,113\ldots 113$$
$$0,114\ldots 114$$
$$0,123\ldots 123$$

Dann haben wir

$$9 \times 9 \times 9$$

Möglichkeiten. Bei

$$0,123$$
$$0,111$$
$$0,abc$$

Doch wenn wir $\frac{0,123\ldots}{0,333\ldots}$ teilen dann haben wir

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

oder wenn wir

$$\frac{0,123\ldots}{2}$$

Dann haben wir

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Das unteliegt also immer noch unserem Beweisverfahren für die abzählbar Unendlichkeit der Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Die Menge der $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \frac{a}{b}$$

$$a \in \mathbb{N}$$

$$b \in \mathbb{N}$$

Menge der $\mathbb{R}$

$$\frac{a}{\sqrt[c]{2}}, \frac{a}{\sqrt[c]{3}}, \frac{a}{\sqrt[c]{7}}, \ldots$$
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (\times N \cup \mathbb{P})$$

Das nächste: Jede Primzahl hoch einer rationalen Zahl bzw. jede Primzahl mit einer rationalen Zahl in der Potenz ist eine irrationale Zahl. Also:

$$2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{4}{3}}$$

Und das geht nicht. D.h. wenn wir eine rationale Zahl in der Potenz haben und zum Beispiel $16^{\frac{1}{3}}$ haben. Dann haben wir bei $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ das hoch $\dfrac{1}{3}$ ist, $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2$, also $2^3 \cdot 2^1$ und das geht nicht. Also: Jede Primzahl von der wir die Wurzel ziehen ist irrational und das geht nicht. Wenn wir aber von einer anderen ganzen Zahl die Wurzel ziehen und die entspricht in ihrer Potenz nicht der Potenz in der Primzahlen enthalten sind, erhalten wir wieder eine irrationale Zahl. Wichtig ist noch

$$0,111\ldots$$
$$0,222\ldots$$

zunächst. Später:

$$0,123123$$
$$0,112112$$

Das sind $9 \cdot 9 \cdot 9$.
Folgendes: Die Megn der $\mathbb{Q}$, $\dfrac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ also $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Die Menge der $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $\dfrac{a}{\sqrt[c]{2}}$, $a \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{N}$,
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nun haben wir nicht nur 2 als Primzahl, sondern auch $2, 3, 7, 11, \ldots$. Also haben wir $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{P}$ und die Menge der $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist damit größer als $\mathbb{Q}$.
Die Menge der Reellen Zahlen ist nicht etwa, etwas wie $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, weil zu den rationalen noch die irrationalen hinzukommen, sondern eher etwas wie das doppelte. Aber die Menge der $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist größer als $\mathbb{Q}$ selber.
Was ist, wenn wir eine Wurzel von einer rationalen Zahl ziehen. $\sqrt{\eth b}$. Na gut:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

und nicht nur $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$. Damit $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$. Und nun: Ist b der a eine Primzahl oder lässt sich bei der Zahl diese Potenz nicht bilden, Potenz $= \dfrac{1}{n}$

$$2^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{16} \pm \ldots pm \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{s_i} \frac{1}{2^i}$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

$$\left(\sum_{i=0)^n(-1}^{s_i} \right)^2 = 2$$

Dann haben wir eine Gleichung mit Reihe. Wie rechnen wir das aus? Große binomische Formel? Kommt nicht in Frage. Aber wir haben ja so oder so

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{16} \pm \cdots \pm \frac{1}{2^n}$$

und von $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ zum Beispiel brauchen wir keine binnomische Formel sondern nur für das $\{1, -1\}$ oder $1^s, s = \{0, 1\}$ Meine Idee wäre so oder so, dass wir zum Beispiel eine Folge

0011001100001111100001111

oder

011011001111001111000011111111

irgend so etwas in der Art. Aber es kommt noch besser: Was ist dann

$$\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{s_i} \cdot \frac{1}{2^i} \right)^2 = 2$$

Das ist nichts anderes als das Intervallhalbierungsverfahren. Da steht auch

$$c^2 < 2$$

Dann testen wir jedes Mal ist $c^2 < 2$ oder $c^2 > 2$ und dementsprechend machen wir

$$(-1)^0$$

oder

$$(-1)^1$$

und quadrieren ist einfacher als Wurzel ziehen oder dividieren, denn quadrieren ist multiplizieren und wir können alles multiplizieren und Wurzlen ziehen ist dividieren, aber wir dividieren durch das, was raus kommt, blos woher wissen wir, was raus kommt, also durch was wir dividieren.

Nur wenn wir zwei Punkte zusammen nehmen, nämlich Folge (s_n) mit $s_n = \{0, 1\}$ mit der Gleichung dann können wir eine ε-Umgebung einführen. Dann haben wir mal $+$ und mal $-$. Und mit unserer Gleichung

$$\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{s_i} \frac{1}{2^i} \right)^2 = 2$$

stellen wir fest wir werden das Vorzeichen wohl wechseln, wenn wir in unserer ε-Umgebung den Abstand zu groß wird. Wir haben zum Beispiel beim letzten Mal subtrahiert, dann addieren wir und wenn der Abstand beim Addieren größer wird, als beim Subtrahieren, dann subtrahieren wir wieder und dann haben wir es mit einer monotonen Folge zu tun. Wir haben eine ε-Umgebung um $\sqrt{2}$ und wir haben außerhalb oder innerhlab der ε-Umgebung liegende Punkte. Und wenn der Abstand beim Subtrahieren zur ε-Umgebung größer wird, als oder vorher beim Addieren, dann Subtrahieren wir wieder. Dabei können wir die ε-Umgebung immer kleiner werden lassen. Und eigentlich haben wir es mit 2 Folgen zu tun, nämlich oberhalb und unterhalb, also (a_n) und (b_n). Diese zwei Folgen werden wohl exponentiell um $\sqrt{2}$ zusammen wachsen. Und dann haben wir im Grunde.

$$2^{\dfrac{1}{2}+a}$$

und

$$2^{\dfrac{2}{2}} = \sqrt{2}$$

und bei der Abweichung im Intervallhalbierungsverfahren haben wir etwas, das größer oder kleiner ist, als $\sqrt{2}$ also $2^{\frac{1}{2}+a}$. Exponentiell? Erinnert das nicht an 2^x und 2^x kann $2^{\frac{1}{2}}$ werden. Und wäre es wenn wir das Intervallhalbierungsverfahren mit anderen Grenzen beginnen. -16 und $+32$. Dann haben wir nicht zum Beispiel $\dfrac{1}{2^5}$, sondern $\dfrac{1}{2^{-5}}$ also 2^5, weil $\dfrac{1}{2^{-5}} = \dfrac{1}{2^{(-1)\cdot 5}} = 2^5$