1 Kartesisches Produkt und Relation

1.1 Kartesisches Produkt/Kreuzprodukt

Mengen, Kreuzprodukt, Kartesisches Produkt:

$$M \times M = M^2$$

$$M \times M \times M = M^3$$

$$M \times M \times M \times \cdots \times M = M^n$$

$$M_1 \times M_2 \times M_3 \times \cdots \times M_n$$

$$A \times B \times C \times \cdots \times Z$$

geordnete Paare (x, y)

geordnetes Trippel (x, y, z)

geordnetes 10-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$

geordnetes n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Kartesisches Produkt: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und seien $M_1, M_2, \dots, M_n$ nichtleere Mengen. Dann heißt die Menge der geordneten n-Tupel

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n\}$$

das **kartesische Produkt** der Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$.

$M = \{1, 2\}$

$$M \times M = \left\{ \begin{array}{ll} (1,1), & (1,2), \\ (2,1), & (2,2) \end{array} \right\}$$

$M = \{1, 2, 3\}$

$$M \times M = \left\{ \begin{array}{lll} (1,1), & (1,2), & (1,3), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3) \end{array} \right\}$$

$M = \{1, 2, 3, 4\}$

$$M \times M = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\}$$

$M = \{1, 2\}$

$$M \times M \times M = \left\{ \begin{array}{ll} (1,1,1), & (1,1,2), \\ (1,2,1), & (1,2,2), \\ (2,1,1), & (2,1,2), \\ (2,2,1), & (2,2,2), \end{array} \right\}$$

$M = \{1, 2, 3\}$

$$M \times M \times M = \left\{ \begin{array}{lll} (1,1,1), & (1,1,2), & (1,1,3), \\ (1,2,1), & (1,2,2), & (1,2,3), \\ (1,3,1), & (1,3,2), & (1,3,3), \\ (2,1,1), & (2,1,2), & (2,1,3), \\ (2,2,1), & (2,2,2), & (2,2,3), \\ (2,3,1), & (2,3,2), & (2,3,3), \\ (3,1,1), & (3,1,2), & (3,1,3), \\ (3,2,1), & (3,2,2), & (3,2,3), \\ (3,3,1), & (3,3,2), & (3,3,3), \end{array} \right\}$$

1.2 Relation,Abbildung,Operation

Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ beliebige nichtleere Menge. Eine n**-stellige Relation** R über $M_1, \ldots, M_n$ ist eine Teilmenge von $M_1 \times \cdots \times M_n$.

$$R \subseteq M_1 \times M_2$$

$$R \subseteq M_1 \times M_2 \times M_3$$

$$R \subseteq M \times M \times \cdots \times M = M^n$$

$$R \subseteq M \times M = \left\{ \begin{array}{lll} \underline{(1,1)}, & (1,2), & (1,3), \\ (2,1), & \underline{(2,2)}, & (2,3), \\ (3,1), & (3,2), & \underline{(3,3)} \end{array} \right\} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} = R$$

$$R \subseteq M \times M = \left\{ \begin{array}{llll} \underline{(1,1)}, & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & \underline{(2,2)}, & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & \underline{(3,3)}, & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & \underline{(4,4)} \end{array} \right\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} = R$$

$$R \subseteq M \times M = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & \underline{(1,2)}, & (1,3), & \underline{(1,4)}, \\ (2,1), & \underline{(2,2)}, & (2,3), & (2,4), \\ \underline{(3,1)}, & (3,2), & \underline{(3,3)}, & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & \underline{(4,3)}, & (4,4) \end{array} \right\} = \{(1,2),(1,4),(2,2),(3,1),(3,3),(4,3)\} = R$$

Sei $R \subseteq M_1 \times M_2$ eine zweistellige Relation. In der Regel wählen wir ein Symbol wie z.B. $\preceq$ oder $\sim$ zur Bezeichnung der Relation und schreiben $x \preceq y$ bzw. $x \sim y$ für $(x, y) \in R$.
Beispiele für Relationen:

- Abbildungen
- Vergleiche im gewohnten Sinne
- Operationen

Vergleiche im gewohnten Sinne, $x \leq y$

$$R = \left\{ \begin{array}{llll} \underline{(1,1)}, & \underline{(1,2)}, & \underline{(1,3)}, & \underline{(1,4)}, \\ (2,1), & \underline{(2,2)}, & \underline{(2,3)}, & \underline{(2,4)}, \\ (3,1), & (3,2), & \underline{(3,3)}, & \underline{(3,4)}, \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & \underline{(4,4)} \end{array} \right\}$$

Vergleiche im gewohnten Sinne, $x = y$

$$R = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} = R$$

Operation $z = x + y$

$$R = \left\{ \begin{array}{lll} (1,1,1), & (1,1,2), & (1,1,3), \\ (1,2,1), & (1,2,2), & (1,2,3), \\ (1,3,1), & (1,3,2), & (1,3,3), \\ (2,1,1), & (2,1,2), & (2,1,3), \\ (2,2,1), & (2,2,2), & (2,2,3), \\ (2,3,1), & (2,3,2), & (2,3,3), \\ (3,1,1), & (3,1,2), & (3,1,3), \\ (3,2,1), & (3,2,2), & (3,2,3), \\ (3,3,1), & (3,3,2), & (3,3,3), \end{array} \right\}$$

- Operation $z = x + y$
- Kartesisches Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- Kartesisches Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $z = x + y \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $z = x + y \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Sei M eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Relation, die die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$. **Reflexivität**
2. Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $x \sim y$ und $y \sim x$ so ist $x = y$. **Antisymmetrie**
3. Für alle x, y, z gilt: $x \sim y$ und $y \sim z$, so ist $x \sim z$. **Transitivität**
   Dann heißt $\sim$ **(partielle Ordnung)**.
   Gilt zusätzlich
4. Für alle $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ oder $y \sim x$. **Linearität**
   so heïst die Ordnung **linear** oder **total**

Sei M eine nichtleere Menge und $\sim$ mit $R_\sim \subseteq M^2$ eine Relation mit den Eigenschaften

1. Für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$. **Reflexivität**
2. Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $x \sim y$, so ist $y \sim x$. **Symmetrie**
3. Für alle $x, y, z \in M$ gilt: Ist $x \sim y$ und $y \sim x$, so ist $x \sim z$. **Transitivität**
   Dann heißt $\sim$ eine **Äquivalenzrelation**

Anders ausgedrückt:
Sei M eine nichtleere Menge und R eine Relation ($R \subseteq M \times M$), die die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für alle $x \in M$ gilt $(x, x) \in R$. **Reflexivität**
2. Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ so ist $x = y$. **Antisymmetrie**
3. Für alle x, y, z gilt: $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, so ist $(x, z) \in R$. **Transitivität**
   Dann heißt R **(partielle Ordnung)**.
   Gilt zusätzlich
4. Für alle $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$. **Linearität**
   so heïst die Ordnung **linear** oder **total**

Sei M eine nichtleere Menge und R mit $R \subseteq M^2$ eine Relation mit den Eigenschaften

1. Für alle $x \in M$ gilt $(x, x) \in R$. **Reflexivität**
2. Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $(x, y) \in R$, so ist $(y, x) \in R$. **Symmetrie**
3. Für alle $x, y, z \in M$ gilt: Ist $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$, so ist $(x, z) \in R$. **Transitivität**
   Dann heißt R eine **Äquivalenzrelation**

Duale Relation: Sei $\preceq$ eine zweistellige Relation, also $R_{\preceq} = \{(x, y) \in M \times N : x \preceq y\}$. Dann heißt $R_{\succeq} = \{(x, y) \in M \times N : (x, y) \in R_{\succeq}\}$ die zu $R_{\preceq}$ **duale Relation**. Es ist also $y \succeq x$ genau dann, wenn $x \preceq y$
Abbildungen: Seien M und N nichtleere Menge.

1. Eine **Abbildung** f der Menge M in die Menge N erhält man durch eine Zuordnung, die jedem **Argument** (**Urbild**) $x \in M$ eindeutig sein **Bild** $f(x)$ zuordnet. M heißt der **Definitionsbereich** von f, die Menge $\{f(x) : x \in M\}$ heißt **Bild** oder **Bildbereich** von M unter f.
2. Die Menge $G_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times N$ heißt **Graph von** f.

- Abbildungen
  - Allgemein Abbildung
  - Funktionen
    - eindimensionale Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
    - mehrdimensionale Funktionen
    - Kurven
    - Vektorfelder

Surjektivität, Injektivität, Bijektivität

2 Die natürlichen Zahlen

Peanosche Axiome

1. 1 ist in $\mathbb{N}$.
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau einen „Nachfolger“$n* \in \mathbb{N}$.
3. 1 ist kein Nachfolger.
4. Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
5. **Vollständige Induktion**: Enthält eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ die 1 und mit jedem nM auch $n*$, dann gilt $M = \mathbb{N}$

Die Vollständige Induktion ist einfach. Wenn wir einen (Induktionsanfang) haben, dass die Aussage für $n = 1$ richtig ist und wir den Induktionsschluss haben, dass die Aussage für, „wenn die Aussage für n stimmt, stimmt sie für $n + 1$“, dann ist der Beweis vollbracht, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ stimmt. Warum? Ja gut, wenn sie für $n = 1$ stimmt und wenn sie, solange sie für n stimmt auch für $n + 1$ stimmt, dann stimmt sie für 2. Weil wenn sie für 1 stimmt und $n + 1$, dann ist $n = 1$ und $n + 1 = 2$, weil $n + 1 = 1 + 1 = 2$, somit stimmt sie für 2, weil $2 = 1 + 1$. Nun stimmt sie aber auch für 3. Denn wenn sie für $n = 2$ stimmt und das tut sie, denn sie stimmte für $n = 1$ und für $n + 1$ und da $n + 1 = 2$ war. Nun stimmmt sie aber auch für n mit $n = 2$ also, da sie nun aber auch für $n + 1$ stimmt, stimmt sie auch für 3, denn $3 = 2 + 1$. Und so weiter.

3 Halbgruppen, Gruppen, Körper

Halbgruppe: Eine Menge mit einer Operation, die dem Assoziativgesetz gehorcht. Eine Menge zum Beispiel die den natürlichen Zahlen entspricht und eine Operation, wie die Multiplikation.

Kommutative Halbgruppe: Eine Halbgruppe, wenn die Operation dem Kommutativgesetz gehorcht, also wenn einerseits das Assoziativgesetz gilt und andererseits das Kommutativgesetz

Monoid: Eine Halbgruppe, bei der es ein neutrales Element zu der Operation gibt. Wie zum Beispiel 1 bei der Multiplikation.

Gruppe: Ein Monoid, bei der es zu der Operation ein inverses Element gibt. Zum Beispiel ist $-a$ das inverse Element zu a. Wenn wir $-a$ zu a addieren, erhalten wir 0 und 0 ist das neutrale Element der Addition „+“.

Körper: Eine Menge, auf die zwei Verknüpfungen + (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) definiert sind. Und bei denen gilt:

1. $(R, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe
2. $(R, \cdot, 1)$ ist eine kommutative Gruppe, wobei gilt: $1 \neq 0$
3. Es gilt das Distributivgesetz, d.h. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

4 linear geordneter Körper

lineare Ordnung, linear geordneter Körper: Sei M eine nichtleere Menge. Auf M sei eine **Relation** $\sim$ gegeben, d.h., $\sim$ ist eine Teilmenge von $M \times M$. Gilt $(x, y) \in \sim$, so schreiben wir

$$x \sim y \text{ (lies: } x \text{ vor } y).$$

Die Relation $\sim$ heißt **Ordnung** auf M und das Paar $(M, \sim)$ eine **geordnete** Menge, wenn für alle $x, y \in M$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $x \sim x$ (Reflexivität)
2. $(x \sim y) \wedge (y \sim x) \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
3. $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim y$ (Transitivität)
   Gilt überdies hinaus auch noch
4. $(x \sim y) \vee (y \sim x)$
   so heißt $\sim$ eine **lineare Ordnung** auf M und $(M, \sim)$ eine **linear geordnete Menge**.

R **als linear geordneter Körper:** Es existiert eine lineare Ordnung $\leq$ („kleiner oder gleich") auf R, sodass $(R, \leq)$ eine linear geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften ist:

1. Für alle $x, y, z \in R$ gilt $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (Verträglichkeit der Addition)
2. Für alle $x, y, z \in R$ gilt $x \leq y$ und $0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$ (Verträglichkeit der Multiplikation)

Für einen linear geordneten Körper schreibt man $(R, \leq)$

5 Die reellen Zahlen

1. Körperaxiome
2. Ordnungsaxiome
3. Schnittaxiom bzw. äquivalente Axiome

1. **Körperaxiome:**
   (a) **Kommutativgesetze:** Es gilt $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$
   (b) **Assoziativgesetze:** Es gilt $a + (b + c) = (a + b) + c$ und $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$
   (c) **Distributivgesetz:** Es gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$
   (d) **Existenz neutraler Elemente:** Es gibt eine reelle Zahl 0 („Null") und eine davon verschiedene Zahl 1 („Eins"), sodass für $a \in \mathbb{R}$ gilt $a + 0 = a$ und $a \cdot 1 = a$.
   (e) **Existenz inverser Elemente:** Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine reelle Zahl $-a$, sodass $a + (-a) = 0$ ist. Ferner gibt es zu jeder reellen Zahl $a \neq 0$ eine reelle Zahl a^{-1}, sodass $a \cdot a^{-1} = 1$ ist.

2. **Ordnungsaxiome:**

   (a) **Trichotonomiegesetz:** Für je zwei reelle Zahlen a, b gilt genau eine der drei Beziehungen

   $$a < b \text{ oder } a = b \text{ oder } a > b$$

   (b) **Transitivitätsgesetz:** Ist $a < b$ und $b < c$, so folgt $a < c$

   (c) **Monotoniegesetze:** Ist $a < b$, so gilt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und es gilt $ac < bc$ für alle $c > 0$. oder

      i. **Verträglichkeit der Addition, Translationsinvarianz:** Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

      ii. **Verträglichkeit der Multiplikation, Dehnungsinvarianz:** Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

   Einen **linear geordneten Körper** kann man auch **angeordneten Körper** nennen

3. **Schnittaxiom** oder **Axiom der Ordnungsvollständigkeit**, oder **Vollständigkeitsaxiom**, oder **axiomatische Beschreibung von $\mathbb{R}$:**
   D.h. das Intervallhalbierungsverfahren existiert, oder die $\sqrt{2}$ oder ähnliche existiert und so sind mit dem Intervallhalbierungsverfahren zum Beispiel alle Wurzeln wie $\sqrt{2}$ (nur als ein Beispiel) zu finden, so dass die Reellen Zahlen vollständig beschrieben sind, im Gegensatz den rationalen Zahlen, bei denen es $\frac{a}{b}$ gibt.

6 Intervallhalbierungsverfahren, ...

1. **Dedekind'scher Schnitt:** Eine Möglichkeit wäre der Dedekind'sche Schnitt.

2. **Intervallhalbierungsverfahren:**

```
a := 0; b := 2;
WHILE(TRUE) DO
      c := (a+b)/2;
      IF c^2 < 2 THEN a := c;
                 ELSE b := c;
      END; /*IF*/
END./*WHILE*/
```

3. Intervallhalbierungsverfahren, ...

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>>

int main(void) {
    double a, b, c, d;
```

```
int i;
int x[100];

c = 2;
d = 2;

for(i = 0;  i < 100;  i++) {
    if(c*c < 2)
        c = c + d;
    else
        c = c - d;
    d = d/2;
}

printf("%lf\n", c);
getchar();

c = 4;
a = 0;
b = 2;

for(i = 0;  i < 100;  i++) {
    c = (a+b)/2;
    if(c*c < 2)
        a = c;
    else
        b = c;
}

printf("%lf\n", c);
getchar();

a = 0;
b = 2;

for(i = 0;  i < 100;  i++) {
    c = (a+b)/2;
    if((c*c) < 2) {
        x[i] = 1;
        a = c;
    }
    else {
        x[i] = 0;
        b = c;
    }
}

printf("\n");
printf("%lf\n", c);
```

```
    for(i = 0;  i < 100;  i++)
        printf("%i", x[i]);

    printf("\n");

    d = 0.5;
    c = 1;

    for(i = 0;  i < 100;  i++) {
        if(x[i])
            c = c + d;
        else
            c = c - d;
        d = d/2;
    }

    printf("%lf", c);


return 0;
}
```

7 Potenzrechengesetze und Logarithmus

7.1 Zahl und Potenz

$$p = b^e$$

$$z = m \cdot b^e$$

$$1 \leq m < b$$

$$1.89217 \cdot 10^2 (= 189,217)$$

$$1 \cdot 10^3 (= 1000)$$

$$\text{Zahl} = \text{Mantisse} \cdot \text{Basis}^{\text{Exponent}}$$

$$\text{Potenz} = \text{Basis}^{\text{Exponent}}$$

- Basis
- Exponent
- Potenz

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$
$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

7.2 Logarithmus

$$a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$$

- a: Basis
- x: Exponent
- b: Potenz

$$a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$$

- $a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$, Lösung:
  - Lösung: Logarithmus von b zur Basis a
  - Lösung: $\log_a(b)$
- $a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$
  - $x =$ Logarithmus von b zur Basis a
  - $x = \log_a(b)$
- $a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$
  - Logarithmus von b zur Basis $a \Leftrightarrow a^x = b$
  - $\log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$

1. $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
2. $\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$
3. $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

8 Fließkommazahlen

- Einfache Genauigkeit (32 Bit)
- Doppelte Genauigkeit (64 Bit)
- Erweiterte Genauigkeit (80 Bit)

$$f = (-1)^s \cdot 1.m \cdot 2^{e-b}$$

Speicherung

$$sem$$

- s Vorzeichenbit
- e Exponent
- b Bias
- m Mantisse oder Signifikant

9 Intervallhalbierungsverfahren

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$$
$$f(1) := s_1 \in \{0,1\}$$
$$f(2) := s_2 \in \{0,1\}$$
$$f(3) := s_3 \in \{0,1\}$$
$$\dots$$
$$f(n) := s_n \in \{0,1\}$$
$$(s_n) := f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$$

Jede irrationale Zahl ist

$$\frac{(a-b)}{2} \pm b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm b_4 \pm \dots \pm b_n \pm b_{n+1} = \frac{(a-b)}{2} \pm \frac{b_1}{2} \pm \frac{\left(\frac{b_1}{2}\right)}{2} \pm \frac{\frac{\left(\frac{b_1}{2}\right)}{2}}{2} \pm \frac{\frac{\frac{\left(\frac{b_1}{2}\right)}{2}}{2}}{2} \pm \dots \pm \frac{\dots\left(\frac{b_1}{2}\right)\dots}{2}$$

$$\frac{(a+b)}{2} \pm \frac{1}{2^1} \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{2^3} \pm \dots \pm \frac{1}{2^n} = \frac{a+b}{2} \pm \sum_{i=1}^{n} (-1)^s \cdot \frac{1}{2^i}, s \in \{0,1\}$$

$$\frac{(a+b)}{2} + (-1)^{s_0} \cdot \frac{1}{2^1} + (-1)^{s_1} \cdot \frac{1}{2^2} + (-1)^{s_2} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^{s_n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{a+b}{2} \pm \sum_{i=1}^{n} (-1)^{s_i} \cdot \frac{1}{2^i}, s \in \{0,1\}$$

$$\frac{(a+b)}{2} + (-1)^{s_0} \cdot \frac{1}{2^1} + (-1)^{s_1} \cdot \frac{1}{2^2} + (-1)^{s_2} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^{s_n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{a+b}{2} \pm \sum_{i=1}^{n} (-1)^{s_i} \cdot \frac{1}{2^i}$$

$$(b_n) = \frac{1}{2^n}$$
$$b_1 = \frac{b_0}{2}$$
$$b_2 = \frac{b_1}{2}$$
$$b_3 = \frac{b_2}{2}$$
$$\dots$$
$$b_n = \frac{b_{n-1}}{2}$$

$$\frac{(a+b)}{2} + (-1)^{s_0} \cdot b_0 + (-1)^{s_1} \cdot b_1 + (-1)^{s_2} \cdot b_2 + \dots + (-1)^{s_n} \cdot b_n = \frac{a+b}{2} \pm \sum_{i=1}^{n} (-1)^{s_i} \cdot b_i$$

```
int main(void) {
    double a, b, c, d;
    int i;
    int x[100];

    c = 2;
    d = 2;

    for(i = 0;  i < 100;  i++) {
        if(c*c < 2)
            c = c + d;
        else
            c = c - d;
        d = d/2;
    }

    printf("%lf\n", c);
    getchar();
return 0;
}
```

Wenn wir jetzt das Intervallhalbierungsverfahren angucken:
Zunächst, bricht das Intervallhalbierungsverfahren nicht ab, dann handelt es sich um eine irrationale Zahl.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Beim nächsten Mal ist es nicht $\frac{1}{2}$ sondern $\frac{1}{4}$. Können wir die $\frac{1}{2}$ erreichen?
Ist $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ja nicht $\frac{1}{2}$?
Ja schon, aber beim nächsten Mal, ist es ja $\frac{1}{8}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Mit dem $\frac{1}{8}$ können wir auch nicht $\frac{1}{4}$ erreichen. Mit dem nächsten? Das ist $\frac{1}{16}$, damit, mit $\frac{8}{+16}\frac{1}{}$ erreichen wir auch $\frac{1}{4}$ nicht. Somit sehen wir, wir kommen nie auf ein Ganzes.
Jetzt zu etwas anderem: Mit dem Intervallhalbierungsverfahren kommen wir einer Zahl natürlich beliebig nahe. Die Intervalle werden kleiner. Nun, es gibt unendlich vile Möglichkeiten $\pm\frac{1}{8} \pm \frac{1}{6} \pm \dots$ auf zu addieren oder subtrahieren, damit gibt es unendlich viele Möglichkeiten irrationale Zahlen zu bilden und nicht nur einige wenige. Der andere Punkt ist, sind denn einige von denen dann auch in der Tat irrationale Zahlen, wie $\sqrt{2}$? Das es unendlich viele gibt ist klar, aber wie können wir nun zeigen, dass die tatsächlich irrational sind und aus dem Konzept der rationalen herausfliegen. Da wir sagten es ja, es gibt nie ein Ganzes, wenn es sich um eine irrationale Zahl handelt, d.h., das Intervallhalbierungsverfahren bricht nicht ab und es gibt so oder so nicht etwas, das endet, oder ein ganzes ist, zu beweisen ist nun, das es bei $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ tatsächlich nicht abbricht.
Fangen wir an: Übrigens, bei

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

wo ein $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{4}$ darstellbar ist, können wir auch schreiben:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}$$

Wir können das so auffassen, wir unterteilen das in Blöcke: Ein Block für $\frac{1}{2}$, wäre:

$$\left(\pm\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\right)$$

$$Block1 + Block2 + Block3$$

Wir können auch sagen: Entsprechend viel achten $\left(\frac{1}{8}\right)$ addieren wir, weil

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

Damit lßst sich alles schreiben als

$$\dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

. Wir addieren beim Intervallhalbierungsverfahren nicht nur: Wir können nicht nur schreiben:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}$$

sondern auch:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}$$

oder

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

D.h. wir addieren nicht nur (das ergibt auch eine irrationale Zahl, wenn wir nicht abbrechen), sondern wir subtrahieren zwischendurch auch. Wenn wir nun $\frac{1}{2}$ abziehen ziehen wir in Wirklichkeit 4 achtel, nämlich $\frac{4}{8}$ ab. Wir können beim Subtrahierne $\frac{1}{8}$, aber auch beliebig $\frac{2}{8}$ subtrahieren, es kommt je danach ob wir addieren oder subtrahieren eine andere irrationale Zahl heraus. Dann ist:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}$$

oder

$$\frac{6}{8} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}$$

oder

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}$$

etwas in dieser Art.
Wie verhält es sich nun mit dem Intervallhalbierungsverfahren bei $\sqrt{2}$?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \simeq \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \simeq \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Dann haben wir

$$0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$$

Was steht denn da nun eigentlich geschrieben:
Zunächst:

$$\frac{1}{2^n} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Eigentlich:

$$\frac{m}{2^n} = 2^{\frac{1}{2}}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, m < n$$

Wichtig: $m < n$

So nun: $m \cdot 2^{-n} = 2^{\frac{1}{2}}$ Wichtig:

$$m \cdot 2^{-n} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Die Gleichung

$$1 \cdot 2^{-n} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Geht schon nicht auf, weil, wir einerseits $-n$ haben, mit einem $-$ und andererseits und das ist wichtig: n ist eine Natürliche Zahl.

$$0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$$

Also: Die Gleichung

$$\frac{1}{2^n} = 2^{\frac{1}{2}}$$

geht schon nicht auf, wegen

$$2^{-n} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Und dann ist n eine natürliche Zahl. Und dann steht da aber

$$m \cdot \frac{1}{2^n} = 2^{\frac{1}{2}}, m < n$$

Die Gleichung geht nie auf, wie es bei einer nicht irrationalen Zahl?

$$m \cdot \frac{1}{2^n} = 4^{\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dann geht die Gleichung auf:

$$m \cdot \frac{1}{2^n} = 2^1 = 2$$

Heißt dass jetzt, weil wir sagten, $n \in \mathbb{N}$ und nun steht da bei $\sqrt{2}$, dass wir die irrationalen Zahlen, die ja eine Potenz wie zum Beispiel $\frac{1}{2}$ haben über sich selber definiert? Nein haben wir nicht, denn die Gleichung beim Intervallhalbierungsverfahren verwendete ein Natürliches n und wir wissen, dass wenn das Intervallhalbierungsverfahren nicht abbricht, handelt es sich um eine irrationale Zahl und wenn das Intervallhalbierungsverfahren keine Lösung findet, handelt es sich um eine irrationale Zahl. Und beim Intervallhalbierungsverfahren verwenden wir $n \in \mathbb{N}$

Binärbaum der irrationalen Zahlen

```
                                   (a-b)/2
                                   /    \
                    ---------------      --------------
                   /                                   \
              -(b_1/2)                               +(b_1)/2
              /      \                               /      \
             /        \                             /        \
            /          \                           /          \
    -(b_2/2)            +(b_2/2)          -(b_2/2)            +(b_2/2)
     /    \              /    \             /    \              /    \
    /      \            /      \           /      \            /      \
-(b_3/2) +(b_3/2) -(b_3/2)  +(b_3/2)  -(b_3/2) +(b_3/2) -(b_3/2) +(b_3/2)
```

10 Abzhählbar unendlich und überabzählbar unendlich bei dem Intervallhalbierungsverfahren

10.1 Intervallhalbierungsverfahren und irrationale Zahlen

Intervallhalbierungsverfahren, 2 Folgen:

1. (s_n)
2. (b_n)

Mittels (s_n) lässt sich eine Zahl bilden:

1. $f(0) = s_0 = 0000$
2. $f(1) = s_1 = 0001$
3. $f(2) = s_2 = 0010$
4. $f(3) = s_3 = 0011$
5. $f(4) = s_4 = 0100$
6. $f(5) = s_5 = 0101$
7. $f(6) = s_6 = 0110$
8. $f(7) = s_7 = 0111$
9. $\ldots$
10. $f(15) = s_{15} = 1111$
11. $\ldots$

Frage: Haben wir es jetzt mit abzählbar unendlich zu tun, weil $0000, 0001, 0010, 0011, \ldots, 1111, \ldots$ natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ darstellen?
Wir schreiben für

- `+(1/2)`: 0
- `+(1/4)`: 0
- `+(1/8)`: 0
- ...

also für `+` jeweils `0`.
Und für

- `-(1/2)`: 1
- `-(1/4)`: 1
- `-(1/8)`: 1
- ...

also für `-` jeweils `1`.

Wir schreiben alle `+1/2` und `-1/2` getrennt untereinander:

```
1 1 11    -(1/2) -(1/4) -(1/8) -(1/16)
1 1 10    -(1/2) -(1/4) -(1/8) +(1/16)
1 1 01    -(1/2) -(1/4) +(1/8) -(1/16)
1 1 00    -(1/2) -(1/4) +(1/8) +(1/16)
1 0 11    -(1/2) +(1/4) -(1/8) -(1/16)
1 0 10    -(1/2) +(1/4) -(1/8) +(1/16)
1 0 01    -(1/2) +(1/4) +(1/8) -(1/16)
1 0 00    -(1/2) +(1/4) +(1/8) +(1/16)
0 1 11    +(1/2) -(1/4) -(1/8) -(1/16)
0 1 10    +(1/2) -(1/4) +(1/8) +(1/16)
0 1 01    +(1/2) -(1/4) +(1/8) -(1/16)
0 1 00    +(1/2) -(1/4) -(1/8) +(1/16)
0 0 11    +(1/2) +(1/4) +(1/8) -(1/16)
0 0 10    +(1/2) +(1/4) +(1/8) +(1/16)
0 0 01    +(1/2) +(1/4) -(1/8) -(1/16)
0 0 00    +(1/2) +(1/4) -(1/8) +(1/16)
```

Dann haben wir dort stehen:

- Für `-(1/2)`: Unendlich Mal die `1`
- Für `+(1/2)`: Unendlich Mal die `0`
- Für `-(1/4)`: Unendlich Mal, aber halb so oft, wie bei `(1/2)` und `-(1/2)` die `1`
- Für `+(1/4)`: Unendlich Mal, aber halb so oft, wie bei `(1/2)` und `-(1/2)` die `0`
- Für `-(1/8)`: Unendlich Mal, aber halb so oft, wie bei `(1/4)` und `-(1/4)` die `1`

- Für `+(1/8)`: Unendlich Mal, aber halb so oft, wie bei `(1/4)` und `-(1/4)` die `0`
- ...

Bei dem Intervallhalbierungsverfahren gibt es `+(1/2)`, `-(1/2)`, dann zu jedem jeweils `+(1/4)`, `-(1/4)`, also `+(1/2)+(1,4)`, `+(1,2)-(1,4)`, `-(1,2)+(1,4)`, `-(1,2)-(1,4)` und dazu jeweils wieder `+(1/8)`, `-(1,8)`, also `+(1/4)+(1/2)+(1/8)`, `+(1/4)+(1/2)-(1/8)`, `+(1/4)-(1/2)+(1/8), ...`, `-(1/4)-(1/2)-(1/8)`, also 8 Mal jeweils `(1/8)` mit wechselndem Vorzeichen.
Dann haben wir bei n Schritten 2^n verschiedene Zahlen.

10.2 Rationale Zahlen

- Rationale Zahlen lassen sich schreiben als: `a/b`.
- `a/b` ist von der Struktur, wie: `a*b`, `a+b`, `a-b`. Die Menge ist dieselbe.
- Wir haben es zu tun mit etwas der Art: $\{a+b\}$ und nicht $\{a+b, a+b+c, a+b+c+d, a+b+c+d+e\}$
- $a+b, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ist eine natürliche Zahl $((a+b) \in \mathbb{N})$
- Nach den Peano-Axiomen lässt sich jede natürliche Zahl schreiben als $1+1+1+\cdots+1$, $a+b = 1+1+1+\cdots+1$
- `a+b`, `1+1`, `1+2`, `1+3`, `1+4`, `2+1`, `2+2`, `2+3`, ist wieder eine Natürliche Zahl
- `a+b = n`, mit $n \in \mathbb{N}$, d.h. $a+b$ ist die Menge der Natürlichen Zahlen
- `a/b` gibt es genauso häufig wie $a+b$
- Also ist die Menge der rationalen Zahlen gleich der, der Natürlichen Zahlen.
- Das geht, denn die Peano-Axiome garantieren die Existenz von `+`. Und dann gibt es bei den Peano-Axiomen 1, $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$, $1+1+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1$, ... Aber $a+b = ((1+1+1+\cdots+1)+(1+1+1+\cdots+1)), a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$. a ist nämlich $1+1+1+\cdots+1$ und $b = 1+1+1+\cdots+1$

Bei `a/b` haben wir für `1/b, 2/b, 3/b, ...` und `a/1`, `a/2`, `a/3`, also haben wir jeweils bei `1/b, 2/b, 3/b, ...` n Schritte und bei `a/1`, `a/2`, `a/3` auch n Schritte, also haben wir $n \cdot n$ Schritte.

10.2.1 Vergleich

Nun haben wir bei 2^n: $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64, \ldots$ und bei $n \cdot n$: $\ldots, 5 \cdot 5 = 25$, $6 \cdot 6 = 36, \ldots$. Also ist 2^n deutlich größer als $n \cdot n = n^2$. Also haben wir bei n Schritten beim Intervallhalbierungsverfahren 2^n. Und alleine $2^5 = 32$ ist größer als $5 \cdot 5 = 25$ und $2^6 = 64$ ist größer als $6 \cdot 6 = 36$. Bei n Schritten sowohl beim Intervallhalbierungsverfahren als auch bei Brüchen.

10.2.2 Andere Intervalllängen beim Intervallhalbierungsverfahren

Wenn wir `1/3` addieren oder subtrahieren. D.h. `+(1/3)`, `-(1/3)`: Egal, wie wir unsere Intervalle einteilen. Ein jeder Baum, ein ternärer Baum, ein tertiärer Baum, ein jeder Baum, egal wie viele Nachfolger ein Knoten hat, lässt sich in einen Binärbaum umwandeln.

11 Natürliche Zahlen

- Eine Natürliche Zahl a ($a \in \mathbb{N}$) ist etwas der Art: $1+1, 1+1+1, 1+1+1+1$.
- Eine Natürliche Zahl bekommt eine Benennung:
  - Zunächst sind Benennungen Ziffern wie $2, 3, 4, \ldots 9, A, B, C, \ldots$
  - Dann in Stellenschreibweise: $1, 2, \ldots, 9, 10, 11, \ldots, 100$
  - Man könnte für jedes 1, $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$, $1+1+1+1+1$ eine eigene Ziffer, oder ein eigenes Zeichen einführen

Natürliche Zahl:

```
1+1
1+1+1
1+1+1+1
```

Natürliche Zahl in Scheme:

```
 1+1
(1+1)+1
((1+1)+1)+1
(((1+1)+1)+1)
((((1+1)+1)+1)+1
```

Natürliche Zahl in Scheme:

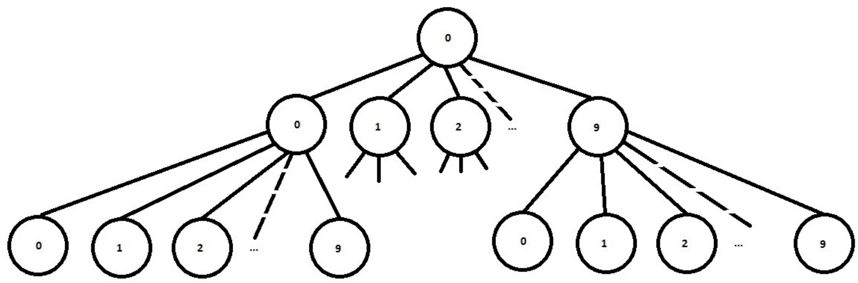
```
(1+1)
 ((1+1)+1)
 (((1+1)+1)+1)
 (((1+1)+1)+1))
 (((((1+1)+1)+1)+1)

(define (n_next n)
 (+ n 1))
```

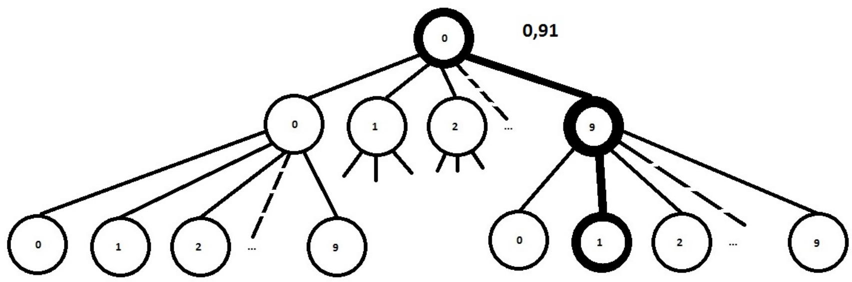
Unäres Zahlensystem:

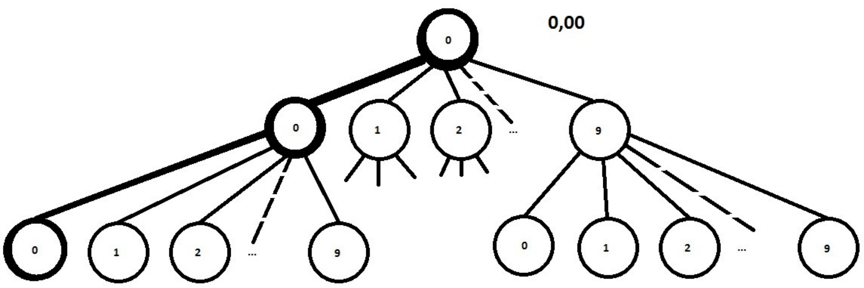
```
I
II
III
IIII
IIIII
```

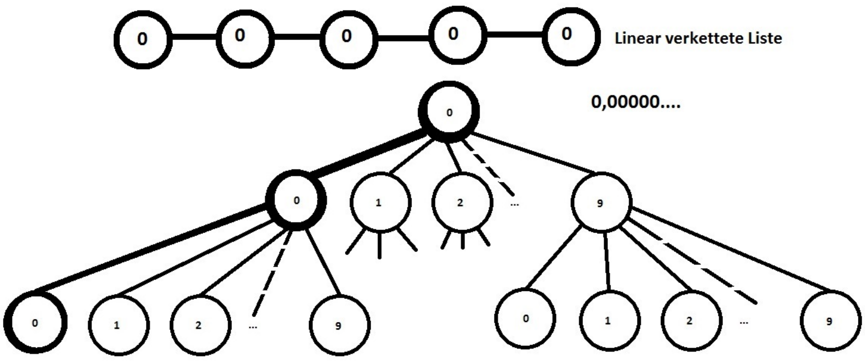
- Das Hinschreiben von Strichen ist die eigentliche Operation.
- Das Unäre Zahlensystem ist mit seinen Strichen so aufgebaut, dass die Striche zusammengefasst jeweils eine Ziffer (wie $0, 1, 2, \ldots, 9$) ergeben könnten. Man könnte für jede Zahl im unären Zahlensystem eine Ziffer einfüren und hätte unendlich viele Ziffern
- Der Abstand von zwei benachbarten Ziffern in einem beliebigen Zahlensystem, ist derselbe wie von zwei benachbarten Zahlen im unären Zahlensystem
- Das Hinschreiben oder löschen von Strichen ist eine Operation: Addieren und Subtrahieren. Früher in der Steinzeit: Für jedes desgleichen was hinzukommt, machen wir einen Strich an die entsprechende Stelle, für alles, was verloren geht, abhanden kommt oder verbraucht wurde, nehmen wir den Strich wieder weg. Ebenso im Gefängnis im alten Rom: Für jeden Gefangenen der kommt und Widerstand leisten kann gibt es einen Strich, für jeden Gefangenen der entlassen wird, oder abhanden kommt, wird ein Strich weggelassen.

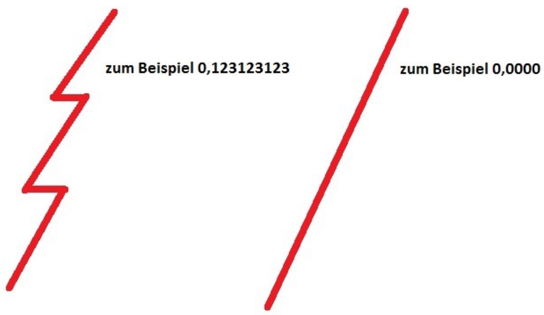
12 Rationale Zahlen und irrationale Zahlen, im Baum

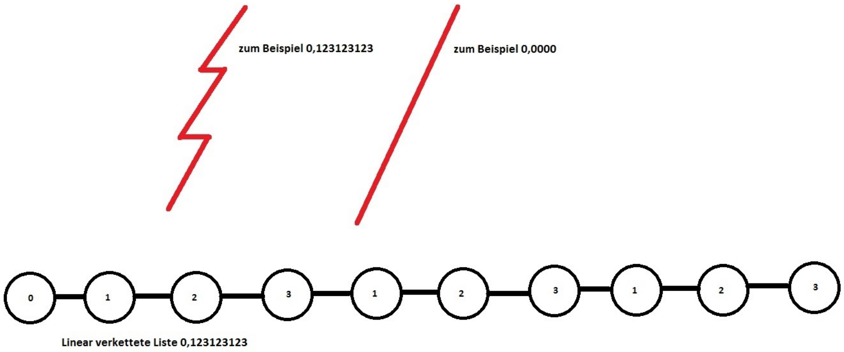


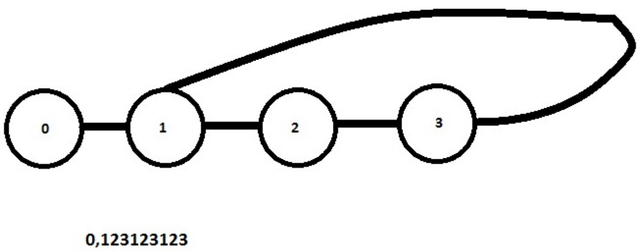


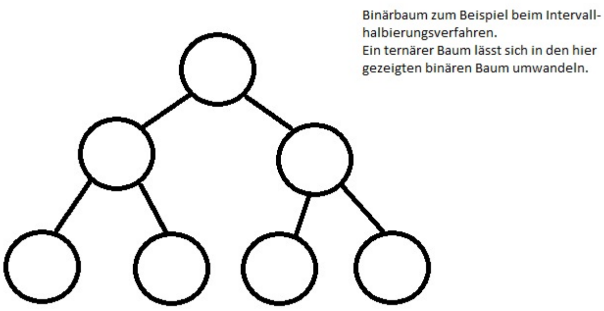

0,00


Linear verkettete Liste
0,00000....


zum Beispiel 0,123123123
zum Beispiel 0,0000







13 Das zustande kommen von irrationalen Zahlen

13.1 Was sind rationale Zahlen?

- Brüche
- Periodische Zahlen

- Zahlen, die irgendwann abbrechen, bzw. wir schreiben keine Periode für 0, bei zum Beispiel $0,11230000000000$, wenn die Zahl nach $0,1123$ abbricht

13.2 Das Enstehen von irrationalen Zahlen

- Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen.
- Irrationale Zahlen Zahlen entstehen, wenn wir die Wurzel einer Primzahl ziehen
  - $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$
  - $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$
- Keine irrationale Zahlen entstehen bei:
  - $\sqrt{2 \cdot 2}$, $\sqrt{3 \cdot 3}$, $\sqrt{5 \cdot 5}$
  - $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$, $\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$
  - $\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2}$, $\sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5}$
- Irrationale Zahlen entsehen bei:
  - $\sqrt{2 \cdot 3}$, $\sqrt{2 \cdot 5}$
  - $\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 3}$
- Jede Zahl, die keine Primzahl ist lässt sich schreiben als:
- $s = a \cdot b$ oder $s = a \cdot b \cdot c, \ldots,$ mit $a \in \mathbb{P}, b \in \mathbb{P}, c \in \mathbb{P}$
- Stimmt die Potenz der Wurzel im umgedrehten nicht mit dem Auftauchen einer Potenz bei dem Produkt von Primzahlen überein, so handelt es sich bei der Wurzel im eine irrationale Zahl
- $\sqrt[3]{a \cdot a \cdot a} = a$, mit $a \in \mathbb{P}$
- Aber irrationale Zahl: $\sqrt[p]{a^r} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, für $r \neq p$
- Beispiel: $\sqrt[3]{2^2}$: Ist irrationale Zahl, weil $3 \neq 2$
- Also:
  - $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
  - $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$
  - Jedes Produkt einer irrationalen Zahl mit einer rationalen Zahl oder einer Natürlichen Zahl, ist wieder eine irrationale Zahl.

– $\sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
  Hier taucht ein Produkt auf, nämlich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und dies ist wieder eine irrationale Zahl, weil $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist und jedes Produkt aus einer irrationalen Zahl und einer Natürlichen Zahl (und auch $\frac{1}{a}$ ist zumindest die Umkehrung eines Produktes) ergibt wieder eine irrationale Zahl.
– Von 8 lässt sich die dritte Wurzel ziehen: $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2$. Von 8 lässt sich nicht die zweite Wurzeln ziehen $\sqrt[2]{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[2]{(2 \cdot 2) \cdot 2}$ und nach $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ gilt nun: $(2 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2 \cdot 2} \cdot \sqrt[2]{2} = 2 \cdot \sqrt[2]{2}$. Nun haben wir wieder ein Produkt von einer natürlichen Zahl, mit einer irrationalen Zahl.
– $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2$
– $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$
– $\sqrt[2]{14} = \sqrt[2]{2 \cdot 7} = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{7}$ und sowohl 2 als auch 7 sind Primzahlen
– $\sqrt[2]{2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{3 \cdot 3} = \sqrt[2]{2} \cdot 3$ und $\sqrt[2]{2}$ ist eine irrationale Zahl
– $\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3} = 2 \cdot 3 = 6$.

14 Ergänzung

Wie sieht es mit den Wurzeln von Brüchen aus: Zunächst: Die Wurzeln lässt sich nur von Quadratzahlen ziehen – wenn man als Ergebnis eine natürliche Zahl oder eine rationale Zahl haben will und nicht etwa eine irrationale – in der Form $n^2 = 25, n \in \mathbb{N}$. 25 ist eine Quadratzahl. Nicht so wie 6: $n^2 = 6, n \in \mathbb{N}$ geht nicht, wenn man nicht eine irrationale Zahl haben will. Vorsicht, es lassen sich nicht nur Wurzeln von Quadratzahlen ziehen, so dass ausschließlich nur eine natürliche Zahl oder rationale Zahl entstünde. Die dritte Wurzel von 8 lässt sich auf jeden Fall ziehen, so dass wir eine natürliche Zahl bekommen. Die Potenz der Wurzel muss mit den jeweiligen Potenzen der Primzahlen unter der Wurzel übereinstimmen, um eine natürlche Zahl zu bekommen.
Nun dann sind wir bei den Quadratzahlen. Von einer Quadratzahl lässt sich die Wurzel ziehen, so dass wir eine Natürliche Zahl bekommen. Ebenso von $0,25$, wenn wir nun über die Natürlichen Zahlen hinausschauen. Von $2,5$ lässt sich die Wurzel nicht ziehen. Aber da steht:

$$25 = 25 \cdot \frac{1}{1}$$

$$2.5 = 25 \cdot \frac{1}{10}$$

$$0.25 = 25 \cdot \frac{1}{100}$$

$$0.025 = 25 \cdot \frac{1}{1000}$$

$$0.0025 = 25 \cdot \frac{1}{10000}$$

Und nach den Potenzrechenrechengesetzen $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ und $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ und $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ gilt:

$$\sqrt{25} = \sqrt{25 \cdot \frac{1}{1}} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{2.5} = \sqrt{25 \cdot \frac{1}{10}} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{\frac{1}{10}} = \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{0.25} = \sqrt{25 \cdot \frac{1}{100}} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{\frac{1}{100}} = \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}}$$

$$\sqrt{0.025} = \sqrt{25 \cdot \frac{1}{1000}} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{\frac{1}{1000}} = \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1000}}$$

$$\sqrt{0.0025} = \sqrt{25 \cdot \frac{1}{10000}} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{\frac{1}{10000}} = \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{10000}}$$

Und $\sqrt{1}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{10000}$ gibt keine irrationale Zahl, sondern eine Natürliche, aber $\sqrt{10}$, $\sqrt{1000}$, ..., ergibt eine irrationale und es lässt sich keine natürliche oder rationale Zahl finden.

15 Vollständige Induktion

Bitte das Prinzip der vollständigen Induktion irgendwo nachlesen.
Daneben gilt:

Die Vollständige Induktion ist einfach. Wenn wir einen (Induktionsanfang) haben, dass die Aussage für $n = 1$ richtig ist und wir den Induktionsschluss haben, dass die Aussage für, „wenn die Aussage für n stimmt, stimmt sie für $n + 1$“, dann ist der Beweis vollbracht, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ stimmt. Warum? Ja gut, wenn sie für $n = 1$ stimmt und wenn sie, solange sie für n stimmt auch für $n + 1$ stimmt, dann stimmt sie für 2. Weil wenn sie für 1 stimmt und $n + 1$, dann ist $n = 1$ und $n + 1 = 2$, weil $n + 1 = 1 + 1 = 2$, somit stimmt sie für 2, weil $2 = 1 + 1$. Nun stimmt sie aber auch für 3. Denn wenn sie für $n = 2$ stimmt und das tut sie, denn sie stimmte für $n = 1$ und für $n + 1$ und da $n + 1 = 2$ war. Nun stimmmt sie aber auch für n mit $n = 2$ also, da sie nun aber auch für $n+1$ stimmt, stimmt sie auch für 3, denn $3 = 2+1$. Und so weiter.

Desweiteren:

15.1 Vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} b(k)$$

lässt sich schreiben als

$$b(1) + b(2) + b(3) + b(4) + \cdots + b(k)$$

$$\sum_{k=1}^{1} b(k)$$

lässt sich schreiben als

$$b(1)$$

$$\sum_{k=1}^{2} b(k) = b(1) + b(2)$$

$$\sum_{k=1}^{3} b(k) = b(1) + b(2) + b(3)$$

$$\sum_{k=1}^{4} b(k) = b(1) + b(2) + b(3) + b(4)$$

$$\sum_{k=1}^{5} b(k) = b(1) + b(2) + b(3) + b(4) + b(5)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) = b(1) + b(2) + b(3) + b(4) + \cdots + b(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} b(k) = b(1) + b(2) + b(3) + b(4) + \cdots + b(n) + b(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} b(k) = b(1) + b(2) + b(3) + b(4) + \cdots + b(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{1} b(k) = b(1)$$

$$\sum_{k=1}^{2} b(k) = b(1) + b(2) = \sum_{k=1}^{1} b(k) + b(2)$$

$$\sum_{k=1}^{3} b(k) = b(1) + b(2) + b(3) = \sum_{k=1}^{2} b(k) + b(3)$$

$$\sum_{k=1}^{4} b(k) = b(1) + b(2) + b(3) + b(4) = \sum_{k=1}^{3} b(k) + b(4)$$

$$\sum_{k=1}^{5} b(k) = b(1) + b(2) + b(3) + b(4) + b(5) = \sum_{k=1}^{4} b(k) + b(5)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) = b(1) + b(2) + b(3) + b(4) + \cdots + b(n) = \sum_{k=1}^{n-1} b(k) + b(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} b(k) = b(1)+b(2)+b(3)+b(4)+\cdots+b(n)+b(n+1) = \sum_{k=1}^{n} b(k)+b(n+1) = \sum_{k=1}^{n-1} b(k)+b(n)+b(n+1)$$

Zum Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{2} k = 1 + 2$$

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3$$

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + n + 1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + 1$$

$$\sum_{k=1}^{2} k = \sum_{k=1}^{1} +2$$

$$\sum_{k=1}^{3} k = \sum_{k=1}^{2} +3$$

$$\sum_{k=1}^{4} k = \sum_{k=1}^{3} +4$$

$$\sum_{k=1}^{5} k = \sum_{k=1}^{4} +5$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} +n$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} +(n+1) = \sum_{k=1}^{n-1} +n + (n+1)$$

Bei der vollständigen Induktion ersetzen wir im Induktionsschritt jedes n durch $n + 1$. Zunächst eine Gleichung bei der vollständigen Induktion sieht aus, wie folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) = a(n)$$

Nun ersetzen wir jedes n durch $n+1$ d.h. wir schreiben

$$\sum_{k=1}^{n+1} b(k) = a(n+1)$$

Im nächsten Schritt spalten wir die Summe auf:

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) + b(n+1) = a(n+1)$$

Nun hatten wir in der Induktionsannahme gesagt:

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) = a(n)$$

Dann schreiben wir unter der Vorraussetzung, dass das richtig ist:

$$a(n) \text{ für } \sum_{k=1}^{n} b(k)$$

Also substituieren wir:

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) + b(n+1) = a(n+1)$$

$$\Rightarrow a(n) + b(n+1) = a(n+1)$$

Und wenn diese Aussage stimmt, nämlich:

$$a(n) + b(n+1) = a(n+1)$$

Dann hat der Induktionsschritt ergeben: Die Induktionsannahme ist oder war richtig und die Gleichung stimmt.

Für die Vollständige Induktion gilt dann. Der Unterschied von $a(n)$ und $a(n+1)$, also

$$a(n+1) - a(n)$$

das ist der Unterschied von $a(n+1)$ und $a(n)$ muss $b(n+1)$ sein. Halten wir zunächst mal alles fest: Wenn es für die 1 gilt, dann gilt es auch für die 2. In dm Fall ist $n = 1$ und $n+1 = 2$. Nun ist n aber jede natürlichen Zahl. Also kann $n = 2$ sein. Dann ist $n+1 = 3$. Nun wenn das stimmt, zum nächsten. Wenn n jede natürliche Zahl sein kann, kann $n = 3$ sein, dann $n+1 = 4$. Wenn dafür die Annahme stimmt, ist das schon Mal richtig. Nun zu etwas anderem: n ist jede Natürliche Zahl. D.h. treffe wir die Aussage für n, gilt es für jede Natürliche Zahl, also auch für $3, 4, \ldots, n \in \mathbb{N}$.
Nun: Wir nen den Unterschied von $a(n)$ und $a(n+1)$ den Abstand oder die Distanz von $a(n+1)$ und $a(n)$.

$$a(n+1) - a(n)$$

Nun hatten wir die Verraussetzung getroffen:

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} b(k)$$

Dann, da wir mit $\sum$ nämlich $\sum_{k=1}^{n} b(k)$ jedes Mal ein $b(k)$ auf addieren $b(1), b(2), b(3), \ldots, b(n), b(n+1)$. Muss der Abstand, wenn die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) = a(n)$$

stimmt, derselbe sein, nämlich der Abstand von

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) \text{ und } \sum_{k=1}^{n+1} b(k)$$

wie von $a(n)$ und $a(n+1)$.
Da dies aber eine allgemeine Aussage für alle n waren, ist immer der Abstand von $a(n+1)$ und $a(n)$ nämlich

$$a(n+1) - a(n)$$

derselbe wie von

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) \text{ und } \sum_{k=1}^{n+1} b(k)$$

weil

$$\sum_{k=1}^{n+1} b(k) = \sum_{k=1}^{n} b(k) = b(n+1)$$

und wenn der Abstand der Summe immer derselbe ist, wie von $a(n)$ und $a(n+1)$, $a(n+1)$ ist das nächste $a(n)$ von n aus gesehen, also die nächste natürliche Zahl. Und wenn der Abstand jedes Mal auf beiden Seiten derselbe ist, unabhängig von jeder Diskussion, gilt die Gleichung bestimmt.
Was nicht heißen soll, das nicht gelten kann

$$\sum_{k=1}^{n} b(k) = a(n) = c(n)$$

Es kann weitere Gleichungen geben.

Zu etwas anderem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ist zumindest eine rationale Zahl. Aber bei

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

haben wir es mit einem Intervallhalbierungsverfahren zu tun. So ist

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{s_k} \cdot \frac{1}{2^k}$$

Das Intervallhalbierungsverfahrenmit der Folge (s_n) für das Vorzeichen. Dann lässt sich also zum Beispiel ein Ausdruck für eine irrationale Zahl beweisen.

Fangen wir an, bei der Eulerschen Zahl:
Also:

$$((1+\frac{1}{n})^{n+1})$$

ist die Folge der Eulerschen Zahl. Die Eulersche Zahl ist auch:

$$(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})$$

Vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}}=\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}+\frac{\frac{1}{(n+1)n!}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}+\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(n+1)n!}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Was haben wir jetzt falsch gemacht. Die Gleichung scheint vom ersten Moment an nicht auf zu gehen. Setzen wir erst ein Mal ein: Wir nehmen eine andere Formel für e nämlich

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Fangen wir an zu überprüfen:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} k!?$$

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} k!?$$

$$\Rightarrow \frac{7776}{3125} = 154??$$

$$2,4888\cdots = 154???$$

Das ist schon falsch. Warum?

$$\left(1+\frac{1}{10000000}\right)^{10000000} = 2,718281\ldots$$

$$\sum_{k=0}^{32} \frac{1}{k!} = 2,718281828$$

Wir sehen es handelt sich um Grenzwerte. Und nun zur vollständigen Induktion. Vollständige Induktion kann auch ab einem anderen Index n_0 beginnen, der ausserhalb von 0 und 1 liegt. Wir können auch 10.000 nehmen. Dann können wir auf der anderen Seite ein ε nehmen und wir würden einen minimalen Wertunterschied festellen.
Wenn wir nun nehmen:

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} + \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(n+1)n!} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

konvergiert gegen etwas zwischen 1 und Eulerschen Zahnl. Aber $n!$ vorallem $n!(n+1)$ wächst viel schneller. D.h.

$$\frac{1}{n!(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}$$

ist eine Nullfolge. Und

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ist auch eine Nullfolge.

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$$

$$n^2+2n+1 \equiv n^2+2n$$

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

konvergiert gegen 1. Das $n+1$ in der Potenz macht bei einer Folge, die gegen 1 konvergiert eine Folge, die gegen 1 konvergiert.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

konvergiert ebenso auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens gegen 1

Also, der Witz bei der Sache ist, dass wir eigentlich Grenzwerte vergleichen, wir vergleichen nicht

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \text{ und } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Sondern

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \text{ und } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Kann man diese dann überhaupt mit vollständiger Induktion miteinander vergleichen? Weil wir vergleichen ja Grenzwerte. Ja man kann, nämlich:

$$\sum_{k=10000}^{n}\frac{1}{k!} \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

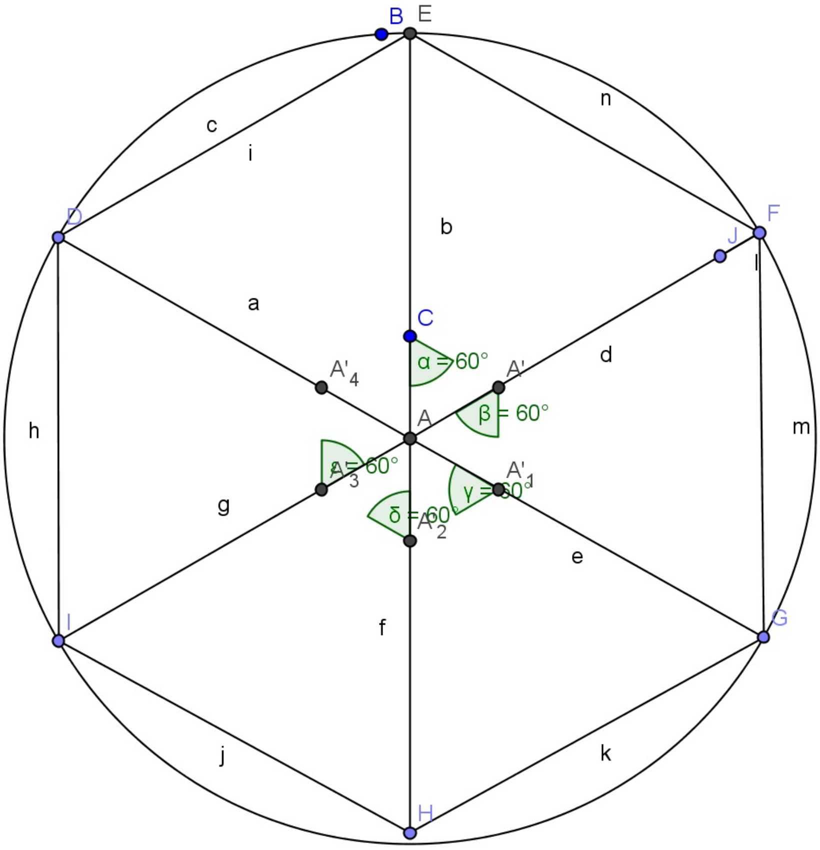
Wie wir sehen haben wir nun den Startindex $k=10000$ gewählt. Und das geht, denn die Vollständige Induktion kann mit einem anderen Startwert beginnen, nämlich $k=10000$. Oder etwas, das darüber liegt. Zum Beispiel, $k=1000000$ oder $k=10000000$

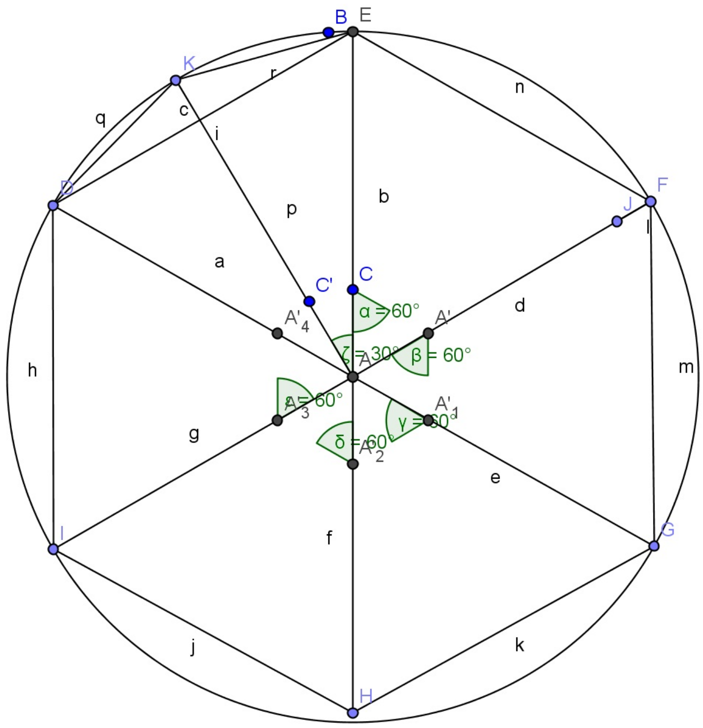
$$\sum_{k=1000000}^{n}\frac{1}{k!} \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

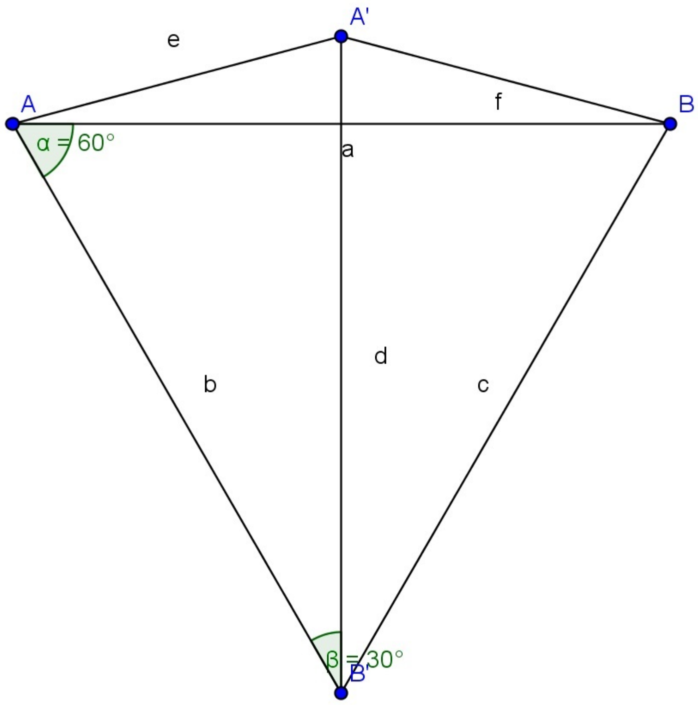
Dann haben wir einen anderen Startwert n_0, mit $k=n_0$.
Damit die Sache nun richtig wird:

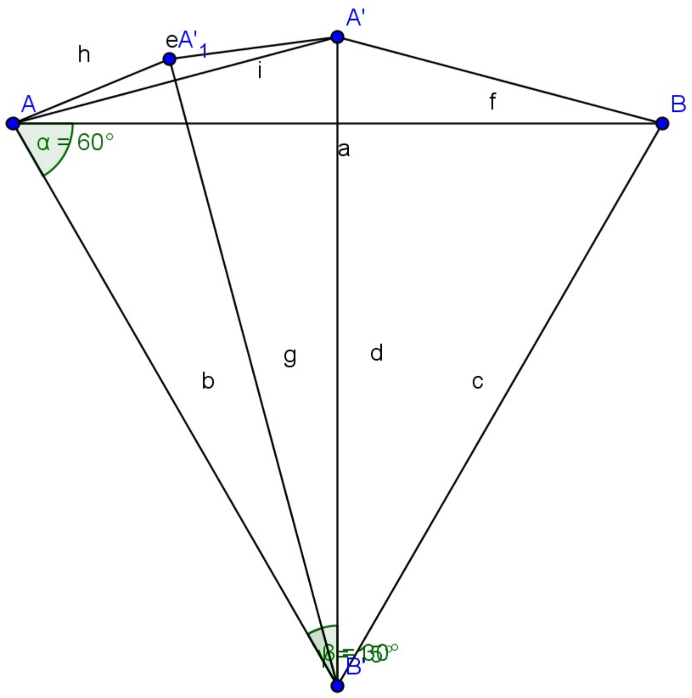
$$\sum_{k=10000}^{n}\frac{1}{k!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \pm \varepsilon$$

16 Pi als irrationale Zahl




B
E
K
r
n
q
c
i
F
J
p
b
l
a
C'
C
α = 60°
d
A'4
ζ = 30°
β = 60°
A
h
m
A'3
A'1
γ = 60°
g
δ = 60°
A'2
e
f
G
I
j
k
H


A'
e
A
f
B
α = 60°
a
d
b
c
β = 30°
B'



$$1 - \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Die Aussenkantenlänge bei einem 12-Eck

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2}$$

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double sqr(double x) {
```

```
return x*x;
}

double sqrt2(double x) {
      double a, b, c;
      int n;

      a = 0;
      b = 2*x;
      for(n = 0;  n < 100;  n++) {
            c = (a+b)/2;
            if((c * c) < x)
                      a = c;
            else
                      b = c;
      }
return c;
}

double pow_simple_int(double x, int n) {
       double y = 1;

       for( ; n > 0;  n--)
            y = y*x;
return y;
}


double pi(int n) {
      double prev;
      double next;
      if(n == 0)
           next = 1;
      else if(n > 0) {
           prev = pi(n-1);
           next = sqrt(sqr(1-sqrt(1-sqr(prev/2)))+sqr(prev/2));
      }
return next;
}

double PI(int n) {
      return pi(n)*3*pow(2, n);
}

double umfang_n_polygon(int n) {
      return PI(n)*2;
}

double sin2PI(void) {return 0;}
double neg_sin2PI(void) {return 0;}
```

```
double cos2PI(void) {return 1;}
double neg_cos2PI(void) {return -1;}

long double faculty(int n) {
       int i;
       long double k;

       if(n == 0)
            return 1;

       k = 1;
       for(i = 1;  i <= n;  i++)
             k = k*i;

return k;
}

long double taylor_sin(long double x) {
       int k;
       double a, a0, a1, a2, a3;
       double y = 0;

       a = 2*PI(100);

       for(k = 0;  k < 32;  k+=4) {
             a0 = sin2PI()/faculty(k);
             a1 = cos2PI()/faculty(k+1);
             a2 = neg_sin2PI()/faculty(k+2);
             a3 = neg_cos2PI()/faculty(k+3);

             y = y + a0*pow_simple_int(x-a, k+0)
                   + a1*pow_simple_int(x-a, k+1)
                   + a2*pow_simple_int(x-a, k+2)
                   + a3*pow_simple_int(x-a, k+3);

       }
return y;
}

long double taylor_sin2(long double x) {
       long int k;
       long double a, a0, a1, a2, a3;
       long double y = 0;
       long double n;

       a = 0;

       for(k = 0;  k < 64;  k+=4) {
             a0 = sin2PI()/faculty(k+0);
             y = y + a0*pow_simple_int(x, k+0);
```

```
            a1 = cos2PI()/faculty(k+1);
            y = y + a1*pow_simple_int(x, k+1);
            a2 = neg_sin2PI()/faculty(k+2);
            y = y + a2*pow_simple_int(x, k+2);
            a3 = neg_cos2PI()/faculty(k+3);
            y = y + a3*pow_simple_int(x, k+3);

       }
return y;
}

long double the_real_taylor_sin(long double x) {
     long double pi_temp = 2*PI(25);
     long double prev_x;
     long double val;
     int flag = 0;



     while(x > 0) {
             prev_x = x;
             x = x-pi_temp;
     }

     if(prev_x - PI(25) > 0) {
               prev_x = prev_x - PI(25);
               flag = 1;
     }

     val = taylor_sin(prev_x);
     if(flag)
             val = val * (-1);

return val;
}

int main(void) {
    printf("%.20f\n", pi(25)*48*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2);
    printf("%.20f\n", PI(25));
    printf("%.20f\n", umfang_n_polygon(25));
    printf("%.20f\n", sqrt2(2));
    printf("%.20f\n", sqrt(2));
    printf("%.20f\n", pow_simple_int(2, 0));
    printf("%.20f\n", pow_simple_int(2, 1));
    printf("%.20f\n", pow_simple_int(2, 2));
    printf("%.20f\n", pow_simple_int(2, 3));
    printf("%.20f\n", pow_simple_int(2, 3));
    printf("%f\n", (double) faculty(0));
    printf("%f\n", (double) faculty(1));
    printf("%f\n", (double) faculty(2));
```

```
    printf("%f\n", (double) faculty(3));
    printf("%f\n", (double) faculty(4));
    printf("%f\n", (double) faculty(5));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin(0));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin(PI(25)*1/2));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin(PI(25)));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin(0.5));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin(0.75));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin(1));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin2(0));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin2(PI(25)*1/2));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin2(0.5));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin2(0.75));
    printf("%f\n", (double) taylor_sin2(1));
    printf("%.20f\n", (double) taylor_sin2(PI(25)*3/4));
    printf("%.20f\n", (double) the_real_taylor_sin(125));
    printf("%.20f\n", (double) the_real_taylor_sin(125.5));
    printf("%.20f\n", (double) the_real_taylor_sin(125.5+PI(25)));
    getchar();
return 0;
```

17 Folge und Nullfolge und Folge mit dem Grenzwert 1

Dies bezieht sich auf die Folgen von vorher. War die Gleichung richtig? Hatte die Umstellung einen Sinn? Wir haben alles umgestellt, aber auf beiden Seiten der Gleichung stehen immer noch Terme und Ausdrücke. Ist es trotzdem richtig?
Ja, denn wir haben auf beiden Seiten der Gleichungen Folgen, die beide eindeutig den Grenzwert 1 aufweisen. Und wenn wir alles umgestellt haben, dann haben wir es richtig umgestellt. Die Umstellung war richtig, auf beiden Seiten der Gleichung und insgesamt zusammen, beide Seiten der Gleichungen als eines gesehen. Nun ist die Frage, wir hatten es richtig umgestellt, aber wir haben noch einen Term auf beiden Seiten. Na gut, aber hier sehen wir, dass auf beiden Seiten der Gleichung gleiches steht, nämlich Folgen die den Grenzwert 1 haben. Und wenn diese beide Seiten übereinstimmen und das tun sie, wenn die Folgen auf beiden Seiten der Gleichung den Grenzwert 1 aufweisen. Und das tun sie. Was heißt Grenzwert 1 aufweisen?

Nun zunächst, wenn wir zu kleine Werte für n einsetzen, funktionieren die Gleichungen nicht. Es besteht keine Übereinstimmung. Aber wir haben es ja mit einem Grenzwert zu tun. Und wenn wir es mit einem Grenzwert zu tun haben, dann müssen wir in beide Folgen möglichst große Zahlen für n einsetzen.

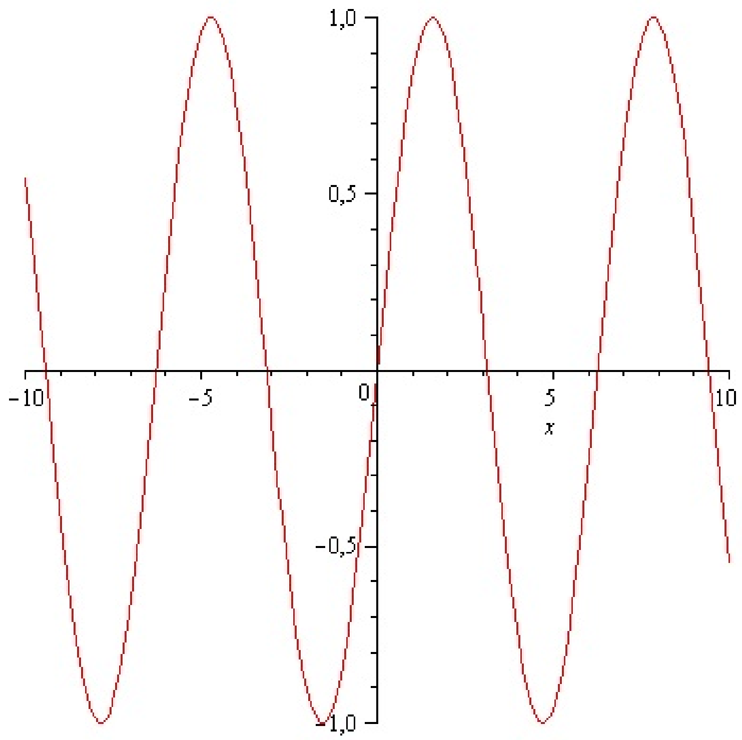
Was heïst nun Grenzwert und Folge?

Nun ja, bei einer Folge haben wir es mit einer Abbildung zu tun. Wir erinnern uns an Funktionen $y := f(x) = \sin(x)$. Oder $y := f(x) = g(x) = x^2$. Ebenso gibt es Folgen, nur diese haben einen Werte und Definitionsbereich, y stammt aus dem Wertebereich und x ist aus dem Definitionsbereich. Folgen weisen einen Definitionsbereich der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf und einen Wertebereich $\mathbb{R}$ auf. Also ist der Definitionsbereich $\mathbb{N}$.

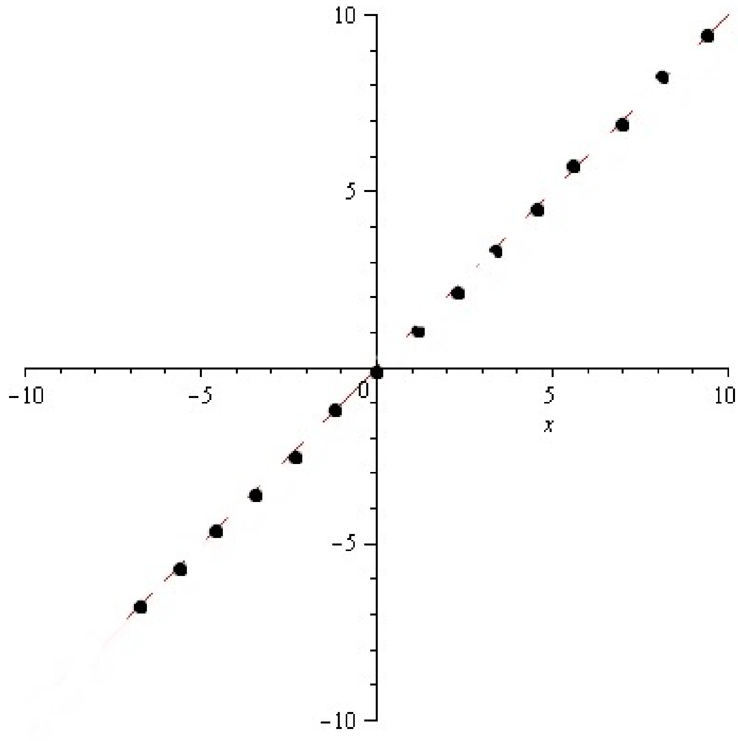
Bei Folgen schreiben wir nicht $f(1) = b_1, f(2) = b_2, f(3) = b_3, \ldots, f(n) = b_n$, sondern wir schreiben (b_n), was aber das gleiche meint, wie $f(n) = b_n$. Nun gut, mit Folgen haben wir es zum Beispiel bei

- $(a_n) = n$
- $(b_n) = \frac{n}{2}$
- $(b_n) = \frac{1}{n}$

zu tun. Das Funktionsschaubild einer Funktion kennen wir (zum Beispiel von $\sin(x)$ oder x^2.
Funktion:



Folge:



Eine Folge wird generell in einem Schaubild nicht anders dargestellt, nur dass wir es mit Punktion zu tun haben, die im Abstand der Zahl 1 auseinander liegen.

1. Eine Funktion ist eine Abbildung ist eine Relation
2. Eine Folge ist eine Abbildung ist eine Relation

1. Eine Funktion ist eine Abbildung ist eine Relation mit einem Definitionsbereich der Reellen Zahlen und einem Funktionsbereich der reellen Zahlen
2. Eine Folge ist eine Abbildung ist eine Relation und einem Definitionsbereich der Natürlichen Zahlen und einem Funktionsbereich der reellen Zahlen

- Eine Abbildung ist immer eine Relation
- Eine Relation ist nicht immer eine Abbildung. Beispiel für eine Relation, die keine Abbildung ist: $=$, $\leq$, ... Eine Äquaivalenzrelation und eine Ordnungsrelation sind keine Abbildungen und es gibt auch weitere Relationen, die keine Abbildungen sind
- Eine Folge ist immer eine Abbildung
- Eine Funktion ist immer eine Abbildung
- Eine Funktion und eine Folge sind sich als Abbildung her sehr änlich, nur hat die Folge einen Definitonsbereich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und eine Folge einen Definitionsbereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Und manchmal werden sie unterschiedlich hingeschrieben, sie können aber auch gleich hingeschrieben werden.

- Eine Abbildung ist nicht immer eine Funktion oder eine Folge. Typisches Beispiel für Abbildungen sind Funktionen und Folgen, aber so ist eine Funktion keine Folge und eine Folge keine Funktion

Kommen wir zum Grenzwert. Nehmen wir eine Folge wie $f(n) = (a_n) = \frac{1}{n}$. Nehmen wir ein paar Werte, wie

- $f(10) = (a_{10}) = \frac{1}{10}$
- $f(100) = (a_{100}) = \frac{1}{100}$
- $f(1000) = (a_{1000}) = \frac{1}{1000}$
- $f(10) = (a_{10}) = \frac{1}{10} = 0.1$
- $f(100) = (a_{100}) = \frac{1}{100} = 0.01$
- $f(1000) = (a_{1000}) = \frac{1}{1000} = 0.001$
- $\dots$

Nehmen wir nun ein ε was beliebig klein werden kann. Zum Beispiel $\varepsilon = 0.2$ und $\varepsilon = 00.2$. Dann gilt:

$$f(10) = (a_{10}) = \frac{1}{10} < 0.2$$

$$f(100) = (a_{100}) = \frac{1}{100} < 0.02$$

Dabei haben wir es mit Grenzwerten zu tun. ε ist eine reelle Zahl, die beliebig klein werden kann. Jede reelle Zahl kann beliebig klein werden. Nun kann aber $f(n) = (a_n) = \frac{1}{n}$ auch beliebig klein werden, weil die Menge der natürlichen Zahl $\mathbb{N}$ ist nach oben hin nicht beschränkt. Also kann auch $\frac{1}{n}$ beliebig klein werden. Und $\frac{1}{n}$ kann immer kleiner ε werden, auch wenn ε beliebig klein werden kann.

Nun wenn eine Zahl wie ε beliebig klein werden kann, dann näher sie sich einem Wert, in dem Fall 0. Der Wert, dem sich die Zahl ε nähert und mit ihm $f(n) = (a_n) = \frac{1}{n}$ oder weiter Folgen wie $g(n) = (b_n) = \frac{1}{n^2}$ werden Grenzwerte genannt. So ist, wenn ε beliebig klein wird eine Folge, wie $0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \dots$ zu sehen, also nähert sich ε der Zahl 0. Somit ist der Grenzwert 0. Bei etwas wie $1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, \dots$ nähert man sich der Zahl 1 und hat einen Grenzwert von 1. Wenn wir nun die Zahl 1 nehmen und die Zahl ε, während sich die Zahl ε 0 nähert, dann entspricht $1 + \varepsilon$, dem Grenzwert von 1. Dann haben wir $1 + 0.1, 1 + 0.01, 1 + 0.001, \dots, 1 + 0.000000001, \dots$.
Wenn wir zwei Folgen haben und die eine Folge hat einen Grenzwert von 1 nämlich (b_n) und eine andere Folge (a_n) hat den Grenzwert 0, dann hat die

Folge $(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n)$ den Grenzwert 1. Weil $1+0$ ergibt 1. Und wenn die eine Folge (a_n) einen Grenzwert von 2 hat und die andere (b_n) einen Grenzwert von 3 dann hat die Folge $(a_n + b_n)$ den Grenzwert $2+3=5$. Ebenso kann man rechnen, die Folge $(a_n) * (b_n)$ hat den Grenzwert $2 \cdot 3 = 6$.

Nun gut Folgen, die den Grenzwert 0 haben sind zum Beispiel

- $(b_n) = \frac{1}{n}$, weil n rapide schneller wächst, als 1, 1 wächst überhaupt nicht
- $(b_n) = \frac{1}{n^2}$ hat den Grenzwert 0, weil n^2 rapide schneller wächst, als 1
- $(b_n) = \frac{1}{2 \cdot n}$ hat den Grenzwert 0, weil $2 \cdot n$ rapide wächst und 1 überhaupt nicht
- Ebenso $(b_n) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

Wenn eine Folge da steht, wie

$$(b_n) = \frac{(2 \cdot n)^2}{(4 \cdot n)^3}$$

Dann haben wir es mit zwei Folgen zu tun, die wiederum eine Folge bilden, die aus dem Quotienten beider Folgen bestehen. Nämlich

$$(c_n) = (2 \cdot n)^2 \text{ und } (a_n) = (4 \cdot n)^3$$

Wobei sich die Folge $(b_n) = (\frac{c_n}{a_n})$ ergibt.
Wächst nun die untere Folge schneller, als die obere, so ist der Grenzwert 0.
Wenn man nun zu dieser Folge eine Folge addiert, die gegen 1 konvergiert, dann haben wir es bei der Summe wieder mit einer Folge zu tun, die gegen 1 konvergiert. Folgen die gegen 1 konvergieren sind zum Beispiel:

- $(b_n) = (1)$
- $(b_n) = (1 + \frac{1}{n})$

Betrachtet man nun die Gleichungen bezüglich der Eulerschen Zahl, so hatten wir ja oben geschrieben:

$$\frac{1}{n!(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}$$

ist eine Nullfolge.

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

Diese Folge konvergiert gegen 1, weil n^2+2n+1 etwa gleich schnell konvergiert wie n^2+2n.
Die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ konvergiert auf jeden Fall gegen 1.

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Konvergiert auch gegen 0 weil die Fakultät stetig schneller wächst als die Folge darüber.

Dann steht auf beiden Seiten der Gleichung eine Folge, die gegen eins konviergiert und da die Umformungen stimmen, stimmt das Ergebnis, weil auf beiden Seiten des Gleichheitseichens gleiches steht.

Und bei der Zahl 1 und einer Folge, die gegen 1 konvergiert können wir das absehen. Wir können erkennen, wenn eine Folge gegen 1 konvergiert und wir können die Zahl 1 identifizieren. Eine Folge, die gegen 1 konvergiert, ist leicht zu erkennen.