Was wir nicht verwechseln dürften, ist

$$\sum \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

und der Differenzenquotient des Integrals bzw. der Summenfunktion, was das Integral. Wir werden aber gleich sehen, das ist am Ende doch das gleiche.

Wenn wir haben

$$\sum_{i=1}^{n} h \cdot \frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}$$

Dann gehen wir jetzt davon aus. Die Vierecke, die unsere Funktion einbeschreiben, haben die Breite h. Dieses geht gegen den Grenzwert 0. Unsere Vierecke werden möglichst klein. Deswegen bietet es sich an h zu nehmen.
Jetzt müssen wir in jedem Viereck, die Fläche $\cdot h$ nehmen. Das können wir in der Sume ausklammer. Und das h fällt raus.
Jetzt bleibt

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i+h)-f(x_i)$$

Der Witz ist jetzt: Die $f(x_i)$ gehen folgende Reinehfolge ein:

$$f(x_i), f(x_{i-1}), f(x_{i-2}), \ldots$$

Wir definieren

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Machen wir da was falsch - das eine ist Index, das andere nicht? Nein, weil bei den x_i handelt es sich um stellen. Wir haben jetzt zwei Sachen, die uns nicht ärgern dürfen. Das eine ist: i ist der der Index, das ist richtig x_i ist aber ein Wert, also eigentlich die Stelle. Das zweite ist, das h übernimmt keine Funktion für die Fläche. Das sind Stellen, die wir einsetzen.

Jetzt: Da das nächste x_i in beiden auftaucht, steht da etwas, wie

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) + f(x_i) - f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}) + \ldots$$

Damit steht am Ende nur noch da

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-n})$$

Womit wir der Sache näher sind. Jetzt warum ist:

$$\sum_{i=1}^{n} h \cdot \frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}$$

dasselbe wie

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x+h) \cdot h - \sum_{i=1}^{n} f(x) \cdot h}{h}$$

Erstens: Für die h gilt dasselbe. Jetzt stehen aber Summe da. Und wir können die einzelnen Glieder zu einer Summe zusammenfassen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x+h) - \sum_{i=1}^{n} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x+h) - f(x)$$